Über die Wahrscheinlichkeit in der (klassischen) Physik

Detlef Dürr

Mathematisches Institut
LMU München

Magliaso, 2018

Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist? Ignoranz?

Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist? Ignoranz?

Henri Poincaré (1854-1912) schreibt in "Wissenschaft und Hypothese"
Wenn wir nicht unwissend wären, gäbe es keine Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist? Ignoranz?

Henri Poincaré (1854-1912) schreibt in "Wissenschaft und Hypothese"
Wenn wir nicht unwissend wären, gäbe es keine Wahrscheinlichkeit.

Stimmt das?

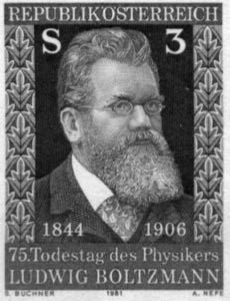
Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist? Ignoranz?

Henri Poincaré (1854-1912) schreibt in "Wissenschaft und Hypothese"
Wenn wir nicht unwissend wären, gäbe es keine Wahrscheinlichkeit.

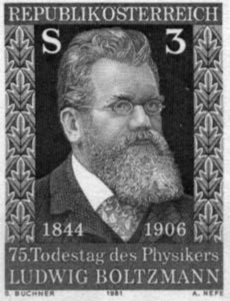
Stimmt das?

Ein allwissendes *kluges* Wesen würde ebenfalls mit dem Zufall argumentieren

Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist eine „typische“ objektive Erscheinung, die sich nicht um Wissen oder Unwissen kümmert



Wahrscheinlichkeit (oder Zufall als Synonym) ist eine „typische“ objektive Erscheinung, die sich nicht um Wissen oder Unwissen kümmert



Ludwig Boltzmann (1844–1906): nicht „alles ist Zahl“, sondern „alles ist große Zahl“

Der Zufall steht über allem

Ludwig Boltzmann hatte die Einsicht, daß ein physikalisches Geschehen unter den gegebenen Bedingungen typisch ist, d.h. eine Entwicklung ist immer so, wie die **allermeisten** Entwicklungen geschehen. Der Zufall erstreckt sich vom Mikroskopischem:

bis hin zum Makroskopischen:

Der Zufall steht über allem

Ludwig Boltzmann hatte die Einsicht, daß ein physikalisches Geschehen unter den gegebenen Bedingungen typisch ist, d.h. eine Entwicklung ist immer so, wie die **allermeisten** Entwicklungen geschehen. Der Zufall erstreckt sich vom Mikroskopischem:

- Brownsche Bewegung und Zufall in der Quantenmechanik

bis hin zum Makroskopischen:

Der Zufall steht über allem

Ludwig Boltzmann hatte die Einsicht, daß ein physikalisches Geschehen unter den gegebenen Bedingungen typisch ist, d.h. eine Entwicklung ist immer so, wie die **allermeisten** Entwicklungen geschehen. Der Zufall erstreckt sich vom Mikroskopischem:

- Brownsche Bewegung und Zufall in der Quantenmechanik

bis hin zum Makroskopischen:

- Bildung von Galaxien.

Darüber ist zu sprechen

und das nicht zu verschweigen

Darüber ist zu sprechen

- Das Verständnis von Zufall in der Physik kommt aus dem Werk des berühmten Physikers Ludwig Boltzmann, moderner Begründer des Atomismus

und das nicht zu verschweigen

Darüber ist zu sprechen

- Das Verständnis von Zufall in der Physik kommt aus dem Werk des berühmten Physikers Ludwig Boltzmann, moderner Begründer des Atomismus

und das nicht zu verschweigen

- Aber das Verständnis ist noch unvollständig, weil unser Universum dem Anschein nach *untypisch* zu sein scheint

Der Zufall in der Physik basiert auf Instabilität der Bewegung und beschreibt das typische Geschehen.

Typisches Verhalten eines aus vielen Teilchen bestehenden Systems kann

Der Zufall in der Physik basiert auf Instabilität der Bewegung und beschreibt das typische Geschehen.

Typisches Verhalten eines aus vielen Teilchen bestehenden Systems kann

- ganz unzufällig erscheinen, wie in einer Kristallanordnung der Teilchen (**statistische Mechanik**)
  oder

Der Zufall in der Physik basiert auf Instabilität der Bewegung und beschreibt das typische Geschehen.

Typisches Verhalten eines aus vielen Teilchen bestehenden Systems kann

- ganz unzufällig erscheinen, wie in einer Kristallanordnung der Teilchen (**statistische Mechanik**)
  oder
- zufällig, wie im klassischen **Münzwurf** oder wie in der Molekülbewegung im Gas (**kinetische Gastheorie**)

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, ..., N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, ..., N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N
2. Für jede Auswahl gibt es $N - 1$ Möglichkeiten, ein weiteres vom ersten verschiedenes Element auszuwählen $\Rightarrow N(N-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente auszuwählen

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, \ldots, N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N
2. Für jede Auswahl gibt es $N - 1$ Möglichkeiten, ein weiteres vom ersten verschiedenes Element auszuwählen $\Rightarrow N(N-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente auszuwählen
3. $\Rightarrow N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)$ Möglichkeiten k verschiedene Elemente auszuwählen, jede Auswahl ist eine „k-Variation“.

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, \ldots, N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N
2. Für jede Auswahl gibt es $N - 1$ Möglichkeiten, ein weiteres vom ersten verschiedenes Element auszuwählen $\Rightarrow N(N-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente auszuwählen
3. $\Rightarrow N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)$ Möglichkeiten k verschiedene Elemente auszuwählen, jede Auswahl ist eine „k-Variation".
4. Für $k = N$ gibt es $N!$ N-Variationen, das sind alle Permutationen von $(1, 2, 3, \ldots, N)$ und $N!$ ist deren Anzahl

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, ..., N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N
2. Für jede Auswahl gibt es $N - 1$ Möglichkeiten, ein weiteres vom ersten verschiedenes Element auszuwählen $\Rightarrow N(N-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente auszuwählen
3. $\Rightarrow N(N-1) \cdot ... \cdot (N-k+1)$ Möglichkeiten k verschiedene Elemente auszuwählen, jede Auswahl ist eine „k-Variation“.
4. Für $k = N$ gibt es $N!$ N-Variationen, das sind alle Permutationen von $(1, 2, 3, ..., N)$ und $N!$ ist deren Anzahl
5. Eine Menge beachtet keine Ordnung der Elemente $\Rightarrow$ jeweils $k!$ k-Variationen sind Permutationen voneinander und equivalent zu der Menge der k Objekte

Was man wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ ist Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

1. N Elemente $\{1, 2, \ldots, N\}$. Anzahl Möglichkeiten, 1 Element auszuwählen: N
2. Für jede Auswahl gibt es $N-1$ Möglichkeiten, ein weiteres vom ersten verschiedenes Element auszuwählen $\Rightarrow N(N-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente auszuwählen
3. $\Rightarrow N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)$ Möglichkeiten k verschiedene Elemente auszuwählen, jede Auswahl ist eine „k-Variation“.
4. Für $k = N$ gibt es $N!$ N-Variationen, das sind alle Permutationen von $(1, 2, 3, \ldots, N)$ und $N!$ ist deren Anzahl
5. Eine Menge beachtet keine Ordnung der Elemente $\Rightarrow$ jeweils $k!$ k-Variationen sind Permutationen voneinander und equivalent zu der Menge der k Objekte
6. $\Rightarrow$ Anzahl der k-elementigen Teilmengen $=$

$$\frac{N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{k!} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!} = \binom{N}{k}$$

Was man noch wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ ist Anzahl von 0 -1 Folgen der Länge N mit genau k Einser. Eine 0 -1 Folge der der Länge N ist eine Folge von Nullen und Einsen mit insgesamt N Einträgen, etwa 01001 für $N = 5$

Beweis: Jede $k-$ elementige Teilmenge einer N-elementigen Menge ist eindeutig zu einer 0 -1 Folge der Länge N mit genau k Einser zugeordnet, deswegen sind deren Anzahlen gleich. Die Zuordnung geht so:

Was man noch wissen muss

$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ ist Anzahl von 0 -1 Folgen der Länge N mit genau k Einser. Eine 0 -1 Folge der der Länge N ist eine Folge von Nullen und Einsen mit insgesamt N Einträgen, etwa 01001 für $N = 5$

Beweis: Jede $k-$ elementige Teilmenge einer N-elementigen Menge ist eindeutig zu einer 0 -1 Folge der Länge N mit genau k Einser zugeordnet, deswegen sind deren Anzahlen gleich. Die Zuordnung geht so:

- Sei $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ eine N-elementige Menge. Wähle k verschiedene Elemente aus, indem man über die ausgewählten Elemente eine Eins schreibt und über die restlichen eine Null, etwa für $N = 5$ und $k = 2$

$$00101 \equiv \{\overset{0}{a_1}, \overset{0}{a_2}, \overset{1}{a_3}, \overset{0}{a_4}, \overset{1}{a_5}\} \equiv \{a_3, a_5\}$$

  Es gibt $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Teilmengen einer $5-$ elementigen Menge mit 2 Elementen, also 10 0 - 1 Folgen der Länge 5 mit genau 2 Einsern.

Was man auch noch wissen muss

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge N gibt es insgesamt? Antwort: An jeder Stelle kann eine Null oder eine Eins stehen, also $2 \cdot 2 \ldots \cdot 2$ also 2 N-mal mit sich selbst malgenommen. Das gibt

Was man auch noch wissen muss

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge N gibt es insgesamt? Antwort: An jeder Stelle kann eine Null oder eine Eins stehen, also $2 \cdot 2 ... \cdot 2$ also 2 N-mal mit sich selbst malgenommen. Das gibt

$$2^N$$

also $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$

Was man auch noch wissen muss

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge N gibt es insgesamt? Antwort: An jeder Stelle kann eine Null oder eine Eins stehen, also $2 \cdot 2 ... \cdot 2$ also 2 N-mal mit sich selbst malgenommen. Das gibt

$$2^N$$

  also $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$
- es gibt also $2^5 = 32$ 0 -1 Folgen der Länge 5 und 10 Folgen davon haben genau 2 Einser.

Boltzmanns große Zahlen

Alter des Universums in Sekunden $\approx 10^{17}$, eine riesengroße Zahl!

Boltzmanns große Zahlen

Alter des Universums in Sekunden $\approx 10^{17}$, eine riesengroße Zahl!

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es?

$$2^{1000} \approx 10^{301}$$

Boltzmanns große Zahlen

Alter des Universums in Sekunden $\approx 10^{17}$, eine riesengroße Zahl!

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es?

$$2^{1000} \approx 10^{301}$$

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es mit genau 500 mal 1?

$$\binom{1000}{500} \approx 10^{299}$$

Boltzmanns große Zahlen

Alter des Universums in Sekunden $\approx 10^{17}$, eine riesengroße Zahl!

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es?

$$2^{1000} \approx 10^{301}$$

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es mit genau 500 mal 1?

$$\binom{1000}{500} \approx 10^{299}$$

- Das sind *fast* alle! Der Unterschied ist $10^2 = 100$

Boltzmanns große Zahlen

Alter des Universums in Sekunden $\approx 10^{17}$, eine riesengroße Zahl!

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es?

$$2^{1000} \approx 10^{301}$$

- Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es mit genau 500 mal 1?

$$\binom{1000}{500} \approx 10^{299}$$

- Das sind *fast* alle! Der Unterschied ist $10^2 = 100$
- Aber jetzt: Wie viele 0 -1 Folgen der Länge 1000 gibt es mit genau 300 mal 1?

$$\binom{1000}{300} \approx 10^{264}$$

Das sind dagegen verschwindend wenige! Der Unterschied ist $\approx 10^{36}$

Typizität

- Man wirft eine Münze 1000 mal.

Typizität

- Man wirft eine Münze 1000 mal. Kopf oder Zahl $\equiv$ 0 oder 1. Wie sieht also eine typische 0 - 1 Folge aus?

Typizität

- Man wirft eine Münze 1000 mal. Kopf oder Zahl $\equiv$ 0 oder 1. Wie sieht also eine typische 0 - 1 Folge aus?
- Es wird eine Folge mit ungefähr 500 mal Kopf sein!

Typizität

- Man wirft eine Münze 1000 mal. Kopf oder Zahl $\equiv$ 0 oder 1. Wie sieht also eine typische 0 - 1 Folge aus?
- Es wird eine Folge mit ungefähr 500 mal Kopf sein!
- Man sagt: Mit "Wahrscheinlichkeit" 1/2 kommt Kopf und meint die *typische* relative Anzahl von Kopf (oder Zahl) in vielen Würfen

Typizität

- Man wirft eine Münze 1000 mal. Kopf oder Zahl $\equiv$ 0 oder 1. Wie sieht also eine typische 0 - 1 Folge aus?
- Es wird eine Folge mit ungefähr 500 mal Kopf sein!
- Man sagt: Mit "Wahrscheinlichkeit" 1/2 kommt Kopf und meint die *typische* relative Anzahl von Kopf (oder Zahl) in vielen Würfen
- Die Erkenntnis: Typizität enthält eine *neue Gesetzmäßigkeit!* Trotzdem die einzelnen Ergebnisse zufällig erscheinen, gibt es typischerweise ungefähr 500 mal Kopf. Die *typische* relative Anzahl kann man getrost "Wahrscheinlichkeit" nennen, wenn man unbedingt diesen Begriff benutzen will.

Eine **typische** Zahl x im Intervall $[0,1]$ in der Zweierdarstellung (Binärdarstellung):

$$x = 0,11001011011000001... = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + ...$$

irreguläre Folge von 1 und 0

Eine **typische** Zahl x im Intervall $[0,1]$ in der Zweierdarstellung (Binärdarstellung):

$$x = 0,11001011011000001... = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + ...$$

irreguläre Folge von 1 und 0

Aber dennoch *regulär*

Eine **typische** Zahl x im Intervall $[0,1]$ in der Zweierdarstellung (Binärdarstellung):

$$x = 0,11001011011000001... = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + ...$$

irreguläre Folge von 1 und 0

Aber dennoch *regulär*

Gesetz der großen Zahlen

Eine **typische** Zahl x im Intervall $[0,1]$ in der Zweierdarstellung (Binärdarstellung):

$$x = 0,11001011011000001\ldots = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + \ldots$$

irreguläre Folge von 1 und 0

Aber dennoch *regulär*

Gesetz der großen Zahlen

Für die allermeisten Zahlen in $[0,1]$ gilt:

$$\frac{\text{Anzahl Einsen (Nullen) in n Stellen}}{\text{n}} \approx \frac{1}{2}$$

für n groß.

Eine **typische** Zahl x im Intervall $[0,1]$ in der Zweierdarstellung (Binärdarstellung):

$$x = 0,11001011011000001... = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + ...$$

irreguläre Folge von 1 und 0

Aber dennoch *regulär*

Gesetz der großen Zahlen

Für die allermeisten Zahlen in $[0,1]$ gilt:

$$\frac{\text{Anzahl Einsen (Nullen) in n Stellen}}{\text{n}} \approx \frac{1}{2}$$

für n groß.

Das gemeine unpräzise Ungefähr „$\approx$“, was hat das in der Mathematik zu suchen?

David Hilbert (1862-1943) verfasste 1900 eine Liste der dringend zu lösenden Probleme der Mathematik

Der Beginn der Verwirrung, dass Beweisbarkeit = Wahrheit ist

6. Hilbertsches Problem von 23 (1900)

Mathematische Behandlung der Axiome der Physik

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik. So regt uns beispielsweise das Boltzmannsche Buch über die Prinzipe der Mechanik an, die dort angedeuteten Grenzprozesse, die von der atomistischen Auffassung zu den Gesetzen über die Bewegung der Kontinua führen, streng mathematisch zu begründen und durchzuführen.

Dabei geht es doch nur darum den Kosmos zu verstehen!

Dabei geht es doch nur darum den Kosmos zu verstehen!

- Die großen Zahlen sprechen für sich!

Dabei geht es doch nur darum den Kosmos zu verstehen!

- Die großen Zahlen sprechen für sich!
- Aber noch ist einiges (sehr vieles, um genau zu sein) zu erklären! Die Gleichsetzung von Münzwurffolge und 0 -1 Folge ist, wenn auch sehr eingängig, ad hoc!

Dabei geht es doch nur darum den Kosmos zu verstehen!

- Die großen Zahlen sprechen für sich!
- Aber noch ist einiges (sehr vieles, um genau zu sein) zu erklären! Die Gleichsetzung von Münzwurffolge und 0 -1 Folge ist, wenn auch sehr eingängig, ad hoc!
- Kann man das besser machen? Ja, kann man, denn der Münzwurf ist ein physikalischer Ablauf!

Zufall *und* Physik?

Marian von Smoluchowski (1872–1917), atomistische Erklärung der Brownschen Bewegung, zeitgleich mit Einstein (1905)

Smoluchowski's Fragen

Smoluchowski's Fragen

1. Wie ist es möglich, daß sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, daß also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? (Gemeint ist das **Gesetz der großen Zahlen**)

Smoluchowski's Fragen

1. Wie ist es möglich, daß sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, daß also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? (Gemeint ist das **Gesetz der großen Zahlen**)
   Diese Frage interessiert Mathematiker und Physiker weil sie technisch schwierig ist

Smoluchowski's Fragen

1. Wie ist es möglich, daß sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, daß also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? (Gemeint ist das **Gesetz der großen Zahlen**)
   Diese Frage interessiert Mathematiker und Physiker weil sie technisch schwierig ist
2. Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? Oder mit anderen Worten: Wie können gesetzmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Smoluchowski's Fragen

1. Wie ist es möglich, daß sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, daß also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? (Gemeint ist das **Gesetz der großen Zahlen**)
   Diese Frage interessiert Mathematiker und Physiker weil sie technisch schwierig ist
2. Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? Oder mit anderen Worten: Wie können gesetzmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?
   Diese Frage bewegt uns alle

Antwort auf Frage 1

Antwort auf Frage 1

Instabilität der Bewegung

Kleine Ursache, große Wirkung

Antwort auf Frage 1

Instabilität der Bewegung

Kleine Ursache, große Wirkung

Antwort auf Frage 2

Antwort auf Frage 1

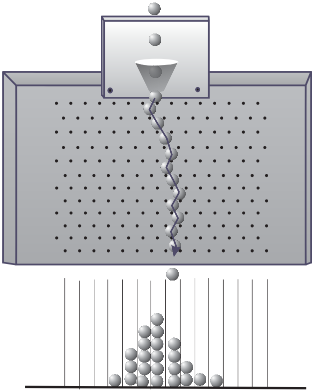
Instabilität der Bewegung

Kleine Ursache, große Wirkung

Antwort auf Frage 2

Ludwig Boltzmann

Frage 1: Berechenbarer Zufall



Galtonsches Brett mit 12 Nagelreihen. Wieviele von N Kugeln landen auf Platz $k = 1, 2, ..., 12$?

$$\text{Antwort: } N \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{k}$$

landläufige Begründung:

landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)

landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)
- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind für jede Nagelreihe unabhängig, daher *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2^{12}}$ für **jeden** Weg.

landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)
- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind für jede Nagelreihe unabhängig, daher *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2^{12}}$ für **jeden** Weg.
- Wieviele Wege führen zum Platz k? Diese Anzahl ist gleich der Anzahl von L-R-Folgen der Länge 12 mit genau k L's $= \binom{12}{k}$

landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)
- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind für jede Nagelreihe unabhängig, daher *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2^{12}}$ für **jeden** Weg.
- Wieviele Wege führen zum Platz k? Diese Anzahl ist gleich der Anzahl von L-R-Folgen der Länge 12 mit genau k L's $= \binom{12}{k}$
- Wahrscheinlichkeit für Kugel auf Platz $k = \frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$, mit Gesetz der großen Zahlen (Wahrscheinlichkeit=relative Anzahl) fallen bei N Kugeln typischerweise $N\frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$ auf Platz k.

landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)
- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind für jede Nagelreihe unabhängig, daher *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2^{12}}$ für **jeden** Weg.
- Wieviele Wege führen zum Platz k? Diese Anzahl ist gleich der Anzahl von L-R-Folgen der Länge 12 mit genau k L's $= \binom{12}{k}$
- Wahrscheinlichkeit für Kugel auf Platz $k = \frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$, mit Gesetz der großen Zahlen (Wahrscheinlichkeit=relative Anzahl) fallen bei N Kugeln typischerweise $N\frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$ auf Platz k.

Haben wir nun die Sache verstanden? Was bedeutet *Wahrscheinlichkeit*?

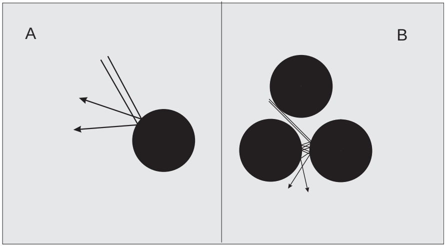
landläufige Begründung:

- An jedem Nagel geht die Kugel mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach rechts (R) und mit *Wahrscheinlichkeit* $1/2$ nach links (L)
- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind für jede Nagelreihe unabhängig, daher *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2^{12}}$ für **jeden** Weg.
- Wieviele Wege führen zum Platz k? Diese Anzahl ist gleich der Anzahl von L-R-Folgen der Länge 12 mit genau k L's $= \binom{12}{k}$
- Wahrscheinlichkeit für Kugel auf Platz $k = \frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$, mit Gesetz der großen Zahlen (Wahrscheinlichkeit=relative Anzahl) fallen bei N Kugeln typischerweise $N\frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$ auf Platz k.

Haben wir nun die Sache verstanden? Was bedeutet *Wahrscheinlichkeit*?

Wieso gibt es ein *Gesetz* im Zufall?

Wieso gibt es ein **Gesetz** im Zufall? Kleine Ursache-große Wirkung



Dicke Nägel (schwarze Kreise), kleine Kugeln: A: Zwei **anfänglich nahe** beieinander liegende Einfallsbahnen werden durch den Stoß mit der runden Nagelfläche aufgetrennt.

B: Dieser Effekt wird durch die Anzahl von Stößen vergrößert. So sehr, dass praktisch nicht mehr erkennbar ist, was vor den Stößen vorlag.

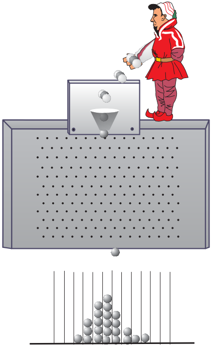
Mathematisches Beispiel

Gesucht: Zahl x zwischen 0 und 1: x$= 0,0000?_1?_2... \Longrightarrow$
Anfangsunsicherheit: $0 \leq x < \frac{1}{32}$

Wie heißt die nächste Ziffer $?_1$ von x?
Sei $?_1 = 0 \Longrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{64}$

Wie heißt die nächste Ziffer $?_2$ von x? $\Longrightarrow$ Das Eingrenzen einer **typischen Zahl** hilft nicht bei der Vorhersage der nächsten Ziffer.

Instabilität ist wichtig, aber ohne Anfangsunsicherheit ist sie wirkungslos !



Das Hereinfallen der Kugeln ist mit Zufall behaftet: Der äußere Zufall!
Dieser wird verstärkt durch Instabilität=Chaos

Chaos erzeugt keinen Zufall, Chaos sorgt nur für das Gesetz im Zufall!

Mit “Anfangsunsicherheit” ($\longrightarrow$ Frage 2) **und** Instabilität des dynamischen Ablaufes

$$\Downarrow$$

Kugellauf im Galtonschen Brett wie Münzwurf oder typische 0-1-Folge.

$$\Downarrow$$

Experimentell überprüfbare Voraussage für relative Häufigkeiten

$$\Downarrow$$

Wenn nacheinander viele Kugeln das Brett durchlaufen = *statistisches Ensemble*, wird sich eine relative Häufung der Kugeln auf Endplätzen ergeben, die ungefähr der berechneten *typischen* relativen Häufigkeit entspricht.

Die relative Häufigkeit nennt man üblicherweise *Wahrscheinlichkeit*

Diese Vorhersage heißt Gesetz der großen Zahlen

Der Merksatz

Die Physik macht im Rahmen der statistischen Argumentation Voraussagen über typische empirische Häufigkeiten – die typische empirische Verteilung, etwa $\rho(k) = N\frac{1}{2^{12}}\binom{12}{k}$ nennt man Wahrscheinlichkeit. Die ist kategorisch von der Anfangsunsicherheit zu unterscheiden – der äußere Zufall –, die auch of als Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird. Die ist aber in Wahrheit ein *Typizitätsmaß* – die Verallgemeinerung der Rolle die Boltzmanns große Zahlen spielen. Darüber ist zu reden.

Die schwierige zweite Frage

Woher kommt der “äußere” Zufall?

Die schwierige zweite Frage

Woher kommt der “äußere” Zufall?

Von außen,

Die schwierige zweite Frage

Woher kommt der “äußere” Zufall?

Von außen, von außen,...

Die schwierige zweite Frage

Woher kommt der “äußere” Zufall?

Von außen, von außen,...

Jedes System ist Teil eines größeren Systems

Die schwierige zweite Frage

Woher kommt der "äußere" Zufall?

Von außen, von außen,...

Jedes System ist Teil eines größeren Systems

Schluss ist beim Universum

Wenn das Universum durch physikalische Gesetze beschrieben werden kann, d.h. wie ein Uhrwerk abläuft

Wenn das Universum durch physikalische Gesetze beschrieben werden kann, d.h. wie ein Uhrwerk abläuft

Wenn das Universum durch physikalische Gesetze beschrieben werden kann, d.h. wie ein Uhrwerk abläuft

woher kommt dann der Zufall?

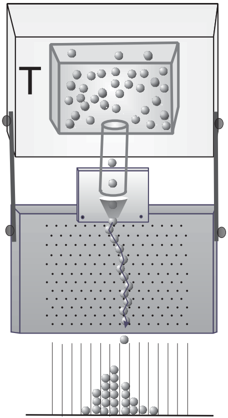
Wenn das Universum durch physikalische Gesetze beschrieben werden kann, d.h. wie ein Uhrwerk abläuft

woher kommt dann der Zufall?

Nachdenken genügt: Kein Platz für Zufall, d.h. Zufall gibt es gar nicht!

Ludwig Boltzmann

In einem **typischen Universum** sieht manches (fast alles für uns Menschen) zufällig aus!



Was ist ein typisches Universum?

Was ist ein typisches Universum?

- Ein typisches Universum ist wie eine typische Zahl. Es gibt ein Kontinuum von möglichen Universen, wie es ein Kontinuum von Zahlen gibt.

Was ist ein typisches Universum?

- Ein typisches Universum ist wie eine typische Zahl. Es gibt ein Kontinuum von möglichen Universen, wie es ein Kontinuum von Zahlen gibt.
- Die "meisten" davon sind typische, aber was sagt uns was von "Unendlich" das "Meiste" ist? Was ersetzt das Abzählen der 0-1-Folgen?

Was ist ein typisches Universum?

- Ein typisches Universum ist wie eine typische Zahl. Es gibt ein Kontinuum von möglichen Universen, wie es ein Kontinuum von Zahlen gibt.
- Die “meisten” davon sind typische, aber was sagt uns was von “Unendlich” das “Meiste” ist? Was ersetzt das Abzählen der 0-1-Folgen?
- Das macht ein Maß, das uns sagt was viel und was wenig ist.

Wer oder Was bestimmt das Typizitätsmaß

Boltzmann Antwort: Das Physikalische Gesetz, was sonst?

Wer oder Was bestimmt das Typizitätsmaß

Boltzmann Antwort: Das Physikalische Gesetz, was sonst?

Wie kann ein physikalisches Gesetz ein Maß bestimmen?

Stationarität: zeitlose Typizität

Stationarität: zeitlose Typizität

- Gesetz bestimmt Dynamik der Teilchen $\Rightarrow$ Fluss

Stationarität: zeitlose Typizität

- Gesetz bestimmt Dynamik der Teilchen $\Rightarrow$ Fluss
- Maß zur Zeit 0 $\mathbb{M}_0 \to \mathbb{M}_t$ Maß zur Zeit t. $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

Stationarität: zeitlose Typizität

- Gesetz bestimmt Dynamik der Teilchen $\Rightarrow$ Fluss
- Maß zur Zeit 0 $\mathbb{M}_0 \to \mathbb{M}_t$ Maß zur Zeit t. $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung
- Suche ein Maß $\mathbb{P}$ so dass $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}$ $\Rightarrow$ Liouvillescher Satz

Stationarität: zeitlose Typizität

- Gesetz bestimmt Dynamik der Teilchen $\Rightarrow$ Fluss
- Maß zur Zeit 0 $\mathbb{M}_0 \to \mathbb{M}_t$ Maß zur Zeit t. $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung
- Suche ein Maß $\mathbb{P}$ so dass $\mathbb{P}_t = \mathbb{P} \Rightarrow$ Liouvillescher Satz
- $\mathbb{P}$ ist das Typizitätsmaß

Daher

Daher

- Sei H eine mathematische Größe mit deren Hilfe das Gesetz formuliert ist $\Rightarrow \mathbb{P}((H))$

Daher

- Sei H eine mathematische Größe mit deren Hilfe das Gesetz formuliert ist $\Rightarrow \mathbb{P}((H))$
- klassische Mechanik, H Hamiltonfunktion, Satz von Liouville, $\Rightarrow$ Boltzmannverteilung $\mathbb{P} \sim e^{-\beta H}$

Daher

- Sei H eine mathematische Größe mit deren Hilfe das Gesetz formuliert ist $\Rightarrow \mathbb{P}((H))$
- klassische Mechanik, H Hamiltonfunktion, Satz von Liouville, $\Rightarrow$ Boltzmannverteilung $\mathbb{P} \sim e^{-\beta H}$
- Bohmsche Mechanik $H = \Psi$ Satz von Stromerhaltung, $\Rightarrow$ Born Verteilung $\mathbb{P} \sim |\Psi|^2$

Das Boltzmannsche Programm

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω
2. Dynamik T_t auf Ω

$$T_t : \Omega \to \Omega \ , \omega \to T_t(\omega)$$

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω
2. Dynamik T_t auf Ω

$$T_t : \Omega \to \Omega \ , \omega \to T_t(\omega)$$

3. Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω: $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(T_{-t}(A)$

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω
2. Dynamik T_t auf Ω

$$T_t : \Omega \to \Omega \; , \omega \to T_t(\omega)$$

3. Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω: $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(T_{-t}(A)$
4. Vergröberung $X : \Omega \to E$ z.B. $E = \{0, 1\}$ beim Münzwurf $=$ Bildebene

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω
2. Dynamik T_t auf Ω

$$T_t : \Omega \to \Omega \;, \omega \to T_t(\omega)$$

3. Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω: $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(T_{-t}(A)$
4. Vergröberung $X : \Omega \to E$ z.B. $E = \{0, 1\}$ beim Münzwurf $=$ Bildebene
5. Typizitätsmaß auf der Bildebene: Bildmass $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in A\})$ z.B. $\mathbb{P}_X(1) = 1/2$ beim Münzwurf

Das Boltzmannsche Programm

1. Fundamental: Menge der ontologischen Konfigurationen: Ω
2. Dynamik T_t auf Ω

$$T_t : \Omega \to \Omega \ , \omega \to T_t(\omega)$$

3. Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω: $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(T_{-t}(A)$
4. Vergröberung $X : \Omega \to E$ z.B. $E = \{0, 1\}$ beim Münzwurf $=$ Bildebene
5. Typizitätsmaß auf der Bildebene: Bildmass $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in A\})$ z.B. $\mathbb{P}_X(1) = 1/2$ beim Münzwurf
6. Zeige, dass empirische Verteilung von z.B. einer langen Münzwurfreihe $\mathbb{P}-$typischerweise gleichhäufig Kopf und Zahl zeigt.

Das 6. Hilbertsche Problem

Das 6. Hilbertsche Problem

- Kolmogorov axiomatisiert den Weg von 1. nach 5.

Das 6. Hilbertsche Problem

- Kolmogorov axiomatisiert den Weg von 1. nach 5.
- 6. ist technisch sehr schwierig: Gesetz der großen Zahlen

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Sieht auf den ersten und zweiten und dritten...Blick nicht so aus

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Sieht auf den ersten und zweiten und dritten...Blick nicht so aus

- Wärme geht nur vom wärmeren auf den kälteren Körper über

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Sieht auf den ersten und zweiten und dritten...Blick nicht so aus

- Wärme geht nur vom wärmeren auf den kälteren Körper über
- Gas strömt aus einer Gasflasche aus und kehrt nicht wieder von selbst in die Flasche zurück (zumindest nicht in einer vorstellbar endlichen Zeit)

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Sieht auf den ersten und zweiten und dritten...Blick nicht so aus

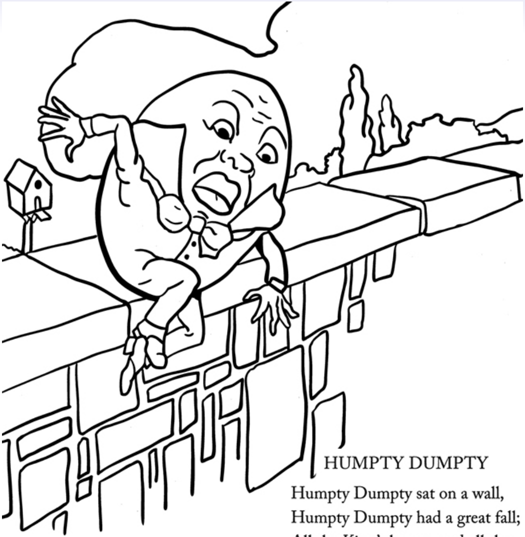
- Wärme geht nur vom wärmeren auf den kälteren Körper über
- Gas strömt aus einer Gasflasche aus und kehrt nicht wieder von selbst in die Flasche zurück (zumindest nicht in einer vorstellbar endlichen Zeit)
- ein Glas fällt vom Tisch und zerbricht aber der umgekehrte Vorgang, das zerbrochene Glas sammelt seine Stücke und springt geheilt auf den Tisch passiert nicht

Subtle is the lord, not malacious?

Ist unser Universum ein typisches?

Sieht auf den ersten und zweiten und dritten...Blick nicht so aus

- Wärme geht nur vom wärmeren auf den kälteren Körper über
- Gas strömt aus einer Gasflasche aus und kehrt nicht wieder von selbst in die Flasche zurück (zumindest nicht in einer vorstellbar endlichen Zeit)
- ein Glas fällt vom Tisch und zerbricht aber der umgekehrte Vorgang, das zerbrochene Glas sammelt seine Stücke und springt geheilt auf den Tisch passiert nicht
- die Entropie unseres Universums wächst stetig an



HUMPTY DUMPTY

Humpty Dumpty sat on a wall,
Humpty Dumpty had a great fall;
All the King's horses, and all the
King's men
Cannot put Humpty Dumpty
together again.

Die Physik erlaubt alle umgekehrten Prozesse! Die Gesetze der Physik unterscheiden keine Zeitrichtung

Die Physik erlaubt alle umgekehrten Prozesse! Die Gesetze der Physik unterscheiden keine Zeitrichtung

Problem: Warum laufen dann viele wichtige Prozesse nur in einer Richtung ab?

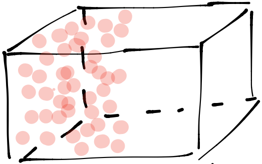
Die Physik erlaubt alle umgekehrten Prozesse! Die Gesetze der Physik unterscheiden keine Zeitrichtung

Problem: Warum laufen dann viele wichtige Prozesse nur in einer Richtung ab?

Ludwig Boltzmann: Das ist **typischerweise** so, allerdings für einen **untypischen** Anfangszustand!

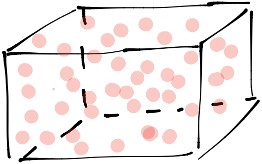
Typisch im Untypischen

untypischer Anfangszustand Zeit $t=0$



Nicht Gleichgewicht

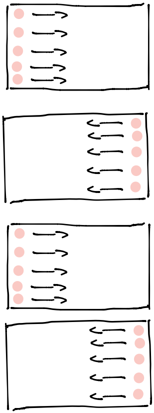
typischerweise $\downarrow$ Zeit später



Gleichgewicht

typischer "Endzustand"

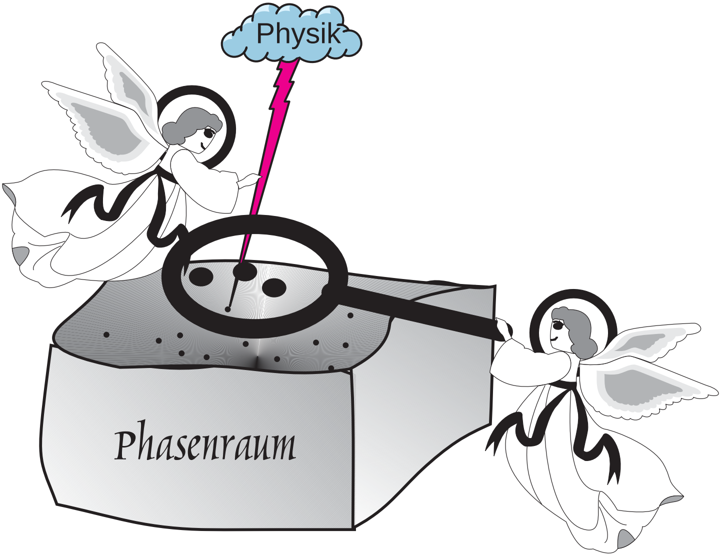
untypisch für immer



Uns fehlt bisher die physikalische Erklärung für unser spezielles Universum. Dies ist bekannt als Problem des “Zeitpfeiles” oder der “Irreversibilität”

Wenn Physik nicht mehr weiterkommt

Wenn Physik nicht mehr weiterkommt



Ende der Geschichte?

Die Frage nach der “speziellen Anfangsbedingung” unseres Universums wird immer wieder hinterfragt, mit dem Versuch die Spezialität als nicht notwendig zu sehen und durch volle Typizität zu ersetzen. Dazu Sean Carrol im Buch: “From Eternity to Here”

> *The origin of the universe and the arrow of time are major unsolved problems in our understanding of the natural world. But there is every reason to expect that they will someday be understood using the laws of physics. The quest to answer these questions helps make it all meaningful.*

Siehe auch Julian Babour mit der relationalen Physik, oder Dustin Lazarovici und Paula Reichert in ihrer Arbeit „Arrow of Time without a Past Hypothesis“ vom letzten Monat.